

OPCIÓN A

1.- Hacer un esquema de la gráfica de una función $f(x)$ que cumple las siguientes propiedades

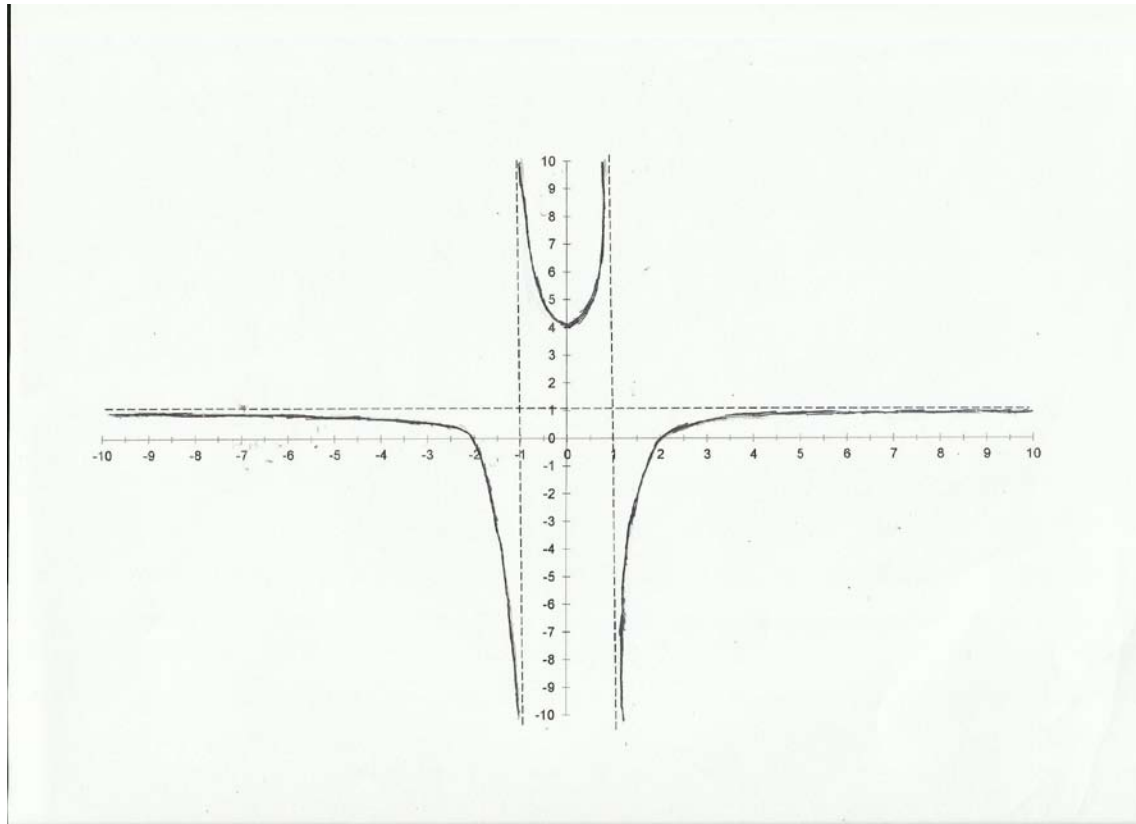
a) Tiene dos asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$

b) Para $x \rightarrow \pm\infty$, se cumple $f(x) = 1$

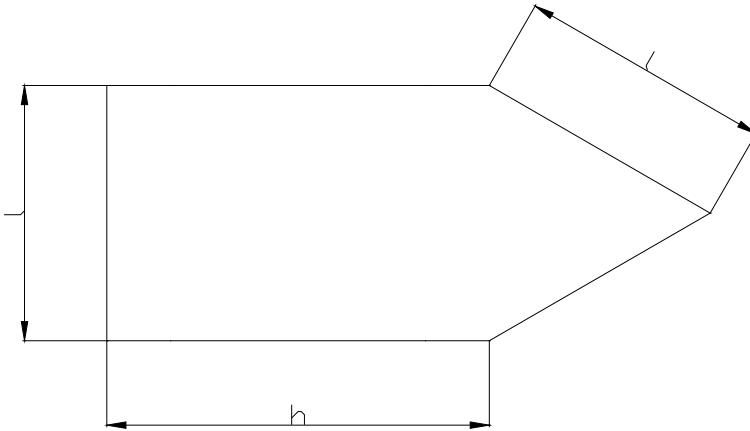
c) $f(-2) = f(2) = 0$

d) Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y es creciente en $(0, 1) \cup (1, \infty)$

e) $f(0) = 4$ y $f'(0) = 0$



2.- Se dispone de un lazo de cuerda de 10 metros de largo, con el cual se dibuja en el suelo una figura formada por una parte rectangular a la que se adosa, en uno de los lados menores un triángulo equilátero:



Sabiendo que la fórmula del área de un triángulo equilátero de lado l es $A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$, hallar las dimensiones de la figura para que su área sea la mayor posible.

$$\begin{cases} 10 = 3l + 2h \Rightarrow 2h = 10 - 3l \Rightarrow h = 5 - \frac{3}{2}l \\ A = hl + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \Rightarrow A = \left(5 - \frac{3}{2}l\right)l + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 = 5l - \frac{3}{2}l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}l^2 \end{cases}$$

$$A = 5l + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)l^2 = 5l + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)l^2 \Rightarrow A' = \frac{dA}{dl} = 5 + 2\left(\frac{\sqrt{3}-6}{4}\right)l = 5 + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)l \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow$$

$$5 + \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)l = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}-6}{2}\right)l = -5 \Rightarrow l = \frac{-10}{\sqrt{3}-6} \Rightarrow l = \frac{10}{6-\sqrt{3}} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dl^2} = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0 \Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\begin{cases} l = \frac{10}{6-\sqrt{3}} = \frac{10(6+\sqrt{3})}{36-3} = \frac{10(6+\sqrt{3})}{33} \text{ m} \\ h = 5 - \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{6-\sqrt{3}} = 5 - \frac{15}{6-\sqrt{3}} = 5 - \frac{15(6+\sqrt{3})}{36-3} = 5 - \frac{15(6+\sqrt{3})}{33} = 5 - \frac{5(6+\sqrt{3})}{11} = \frac{5(5-\sqrt{3})}{11} \text{ m.} \end{cases}$$

3.- Estudiar para que valores de λ es invertible la matriz siguiente: $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ y, en

caso de ser posible, hallar su inversa para $\lambda = 2$

Para que sea invertible una matriz su determinante tiene que ser distinto de cero. Llamando **A** a la matriz

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \\ \lambda-1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$$

(Para todo) $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow (\text{Existe}) \exists A^{-1}$

Cuando $\lambda = 2 \Rightarrow |A| = 2(2+1)(2-1) = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6 \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- En el espacio se consideran los puntos **(1, 2, -3)**, **(3, -1, 0)** y **(5, -4, 3)**. Investigar si están alineados. En caso afirmativo, hallar las ecuaciones de la recta que los contiene. En caso negativo, calcular la ecuación del plano que definen.

Si están alineados **A**, **B** y **C**, respectivamente nominados los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3, -1, 0) - (1, 2, -3) = (2, -3, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (5, -4, 3) - (1, 2, -3) = (4, -6, 6) \equiv (2, -3, 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \text{Están alineados}$$

Ecuación de la recta r

$$\begin{cases} v_r = \overrightarrow{AB} = (2, -3, 3) \\ A(1, 2, -3) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ x = 2 - 3\lambda \\ x = -3 + 3\lambda \end{cases}$$

OPCIÓN B

1.- Dada la función $f(x)$ definida por $f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & (x < 0) \\ x^2 + ax & (x \geq 0) \end{cases}$ determinar el valor (o los valores) de a para que resulte derivable en todos los puntos donde está definida.

Para ser derivable tiene que ser, primeramente continua

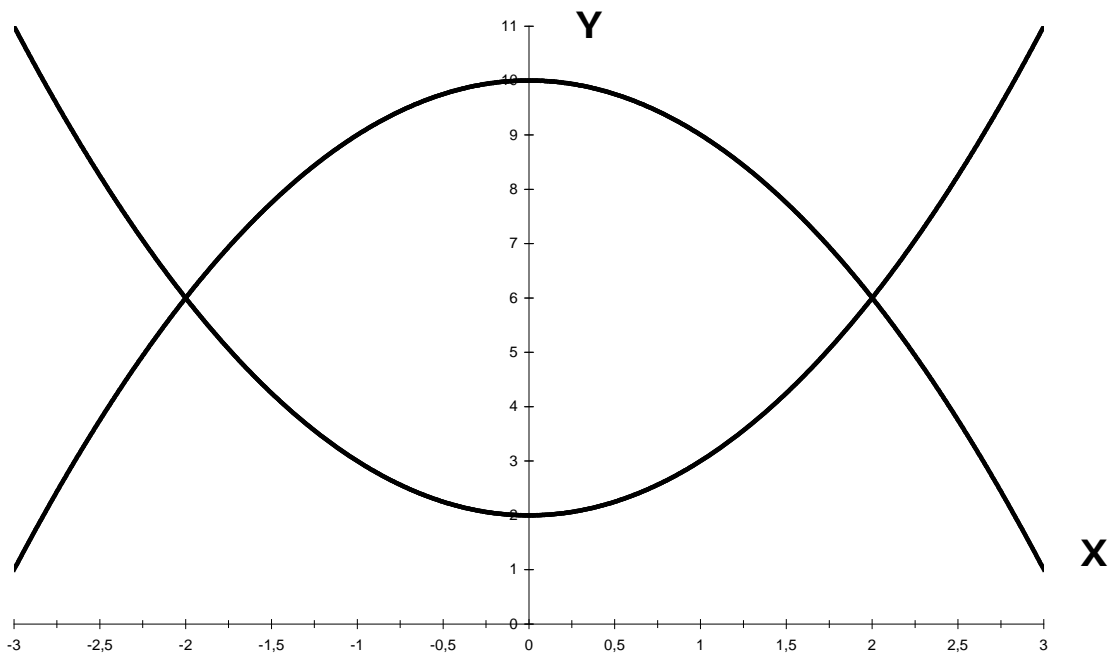
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \\ f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0^2 + a \cdot 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow \text{Es continua para todo } a \in \mathfrak{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & (x < 0) \\ 2x + a & (x > 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2 \cdot 0 + a = a \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = a \Rightarrow a = 1$$

2.- Dadas las funciones $x^2 + 2$ y $-x^2 + 10$, se pide:

- Representar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones
- Calcular el área de dicho recinto

a)



$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 + 2 = -x^2 + 10 \Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Son simétricas respecto a OY}$$

$$A = 2 \int_0^2 (-x^2 + 10) dx - 2 \int_0^2 (x^2 + 2) dx = \int_0^2 (-4x^2 + 16) dx = -4 \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^2 + 16 \cdot [x]_0^2$$

$$A = -\frac{4}{3} \cdot (2^3 - 0^3) + 16 \cdot (2 - 0) = -\frac{32}{3} + 32 = \frac{64}{3} u^2$$

3.- Discutir el siguiente sistema en función de los valores del parámetro m y resolverlo para un

$$\text{valor que lo haga compatible y determinado} \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \text{Por Ruffini}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = (m-1)(m^2 + m - 2) = 0 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2)$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{-2, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Soluciones para el Sistema Compatible Determinado para todos los valores de m que lo cumplen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m^2 - m^2 - m - m^3 - 1 - m^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{-m^3 - m^2 - m - 1}{(m-1)^2(m+2)} = -\frac{m^3 + m^2 + m + 1}{(m-1)^2(m+2)}$$

$$x = -\frac{(m+1)^2(m-1)}{(m-1)^2(m+2)} = -\frac{(m+1)^2}{(m-1)(m+2)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m^3 + 1 + m^2 - m - m^3 - m}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m^2 - 2m + 1}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m-1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{1}{m+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m^4 + m + 1 - m - m^2 - m^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{m^4 - 2m^2 + 1}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m-1)^2(m+1)^2}{(m-1)^2(m+2)} = \frac{(m+1)^2}{m+2}$$

Si $m = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & 8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 6 \Rightarrow$$

$z = \frac{6}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$

Continuación del Problema 3 de la Opción B

Si $m = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La segunda y la tercera son combinación lineal de la primera} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado

4.- Obtener la ecuación del plano que contiene a las dos rectas siguientes:

$$r_1 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2} ; \quad r_2 \equiv \{(x, y, z) = (-7, 1, 2) + \lambda(4, -1, 0)\}$$

Para formar un plano las rectas o son paralelas o tienen que cortarse en un punto, son paralelas si sus vectores directores son iguales o proporcionales, de no serlo tienen que tener un punto P común o de corte, que con el punto G, generador del plano forma un vector coplanario con los de las rectas dadas y el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano π pedido.

Si no se cortan se cruzarían y no formarían un plano

$$r_1 \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2} ; \quad r_2 \equiv \{(x, y, z) = (-7, 1, 2) + \lambda(4, -1, 0)\}$$

$$\begin{cases} v_{r_1} = (2, -3, -2) \\ v_{r_2} = (4, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{4} \neq \frac{-3}{-1} \Rightarrow \text{No son paralelas}$$

Punto de corte

$$\begin{cases} 3 + 2\mu = -7 + 4\lambda \\ -4 - 3\mu = 1 - \lambda \Rightarrow -2\mu = 2 \Rightarrow \mu = -1 \Rightarrow 3 + 2 \cdot (-1) = -7 + 4\lambda \Rightarrow 4\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow \\ -2\mu = 2 \end{cases}$$

$$-4 - 3(-1) = 1 - 2 \Rightarrow -1 = -1 \Rightarrow \text{Sistema Compatible} \Rightarrow P \begin{cases} x = -7 + 4 \cdot 2 \\ y = 1 - 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, -1, 2)$$

$$\begin{cases} v_{r_1} = (2, -3, -2) \\ v_{r_2} = (4, -1, 0) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-8(y+1) - 2(z-2) + 12(z-2) - 2(x+1) = 0 \Rightarrow -2(x+1) - 8(y+1) + 10(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$(x+1) + 4(y+1) - 5(z-2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 4y - 5z - 5 = 0$$